Ordinare e classificare

Per **ordinare** cose, informazioni, persone e oggetti diversi usualmente si seguono delle regole, indicate con il nome di **criteri**, definite di volta in volta o secondo il contesto.

Una biblioteca organizza, per esempio, i libri in scaffali, armadi e sale suddividendoli in categorie, per argomento, autore, genere e comunque secondo schemi ben precisi.

Gli alunni di scuola, per esempio, sono organizzati per corso e per anno.

Library of Plantin Moretus Museum Photo by Meltwaterfalls, October 2005

Gli organismi viventi, animali e piante, sono stati raggruppati e classificati secondo loro caratteristiche comuni.

Quando Carlo Linneo propose il suo sistema per la classificazione di piante e animali, si basò su regole che sono ancora oggi seguite da botanici e zoologi.

In un museo i reperti di botanica o di zoologia sono conservati nelle collezioni ed esposti al pubblico in conformità a criteri ben definiti.

Matematica e scienze

Carl Nilsson Linnaeus (1707 - 1778), botanico e naturalista svedese propose per primo un sistema per la classificazione di piante e animali, denominato "nomenclatura binomia", che attribuisce ad ogni essere vivente un nome, riferendosi alla sua appartenenza a gruppi con caratteristiche comuni.

Classificare significa ordinare degli oggetti secondo criteri di somiglianza o appartenenza, suddividendoli in classi.

I criteri di classificazione possono essere oggettivi o soggettivi.

Un **criterio oggettivo** si fonda su regole e criteri precisi, in modo che chiunque possa utilizzarle ottenendo gli stessi risultati.

Ne sono un esempio le guide per trovare il nome scientifico di animali e piante. Due persone diverse che usano lo stesso classificatore dovrebbero arrivare alle stesse conclusioni e assegnare lo stesso nome scientifico a due animali della stessa specie.

Un criterio di classificazione è una regola che detta il modo di procedere o di selezionare.

Matematica e tecnologia

Nei computer le informazioni sono organizzate in archivi, detti base di dati. Le basi dati raccolgono grandi quantità di informazioni, classificandole secondo criteri precisi.

Quando si cercano informazioni su Internet e si usa un "motore di ricerca", si effettua un'interrogazione alla base dati di questo strumento di ricerca.

Un **criterio soggettivo**, come dice la parola stessa, è legato al soggetto, quindi può essere diverso per ogni persona e perciò non è utilizzabile in matematica.

I criteri, in questi casi, non sono sempre univoci, cioè validi per tutti o condivisi da tutti.

La **suddivisione** di oggetti e informazioni in gruppi può essere **casuale**, quando gli oggetti sono raggruppati senza tenere conto di un preciso criterio, o **funzionale**, quanto la suddivisione tiene conto di uno o più criteri.

Matematica e scienze

Non sempre l'appartenenza a un gruppo è così chiara nelle scienze, come si potrebbe pensare. Nel caso delle alghe rosse (Rodofite), ad esempio, gli scienziati sono ancora divisi sull'opportunità o meno di inserirle nel regno delle Piante.

Gettando la biancheria alla rinfusa nell'armadio, applicheresti una suddivisione assolutamente casuale. Quando avrai bisogno di due calzini uguali potresti dover rovistare a lungo prima di trovarli. È più conveniente raggruppare la biancheria seguendo alcuni criteri.

Gli insiemi

Il concetto di **insieme** deriva dall'azione di classificare e dal raggruppare di oggetti, sulla base di precisi criteri. Il concetto di insieme è un **concetto primitivo**. Non è possibile, cioè, dare una definizione di insieme esplicita. Un insieme è definito, quindi, riferendosi agli oggetti che lo compongono.

*Un **insieme** è una collezione di oggetti con caratteristiche comuni.*

Costituiscono un insieme gli alunni di una classe, gli animali che vivono in un prato, le piante che appartengono alla famiglia delle Rosacee e i numeri naturali (insieme indicato con $\mathbb{N}$).

*Un **elemento** è uno dei componenti di un insieme.*

Il concetto di insieme è molto usato. Nel linguaggio matematico è importante definire in modo rigoroso se un elemento appartiene o non appartiene a un insieme.

Un insieme, inteso in senso matematico, deve essere costruito con criteri oggettivi, avere al suo interno elementi chiaramente distinguibili e possedere elementi riconoscibili come appartenenti a esso.

Non sono insiemi, intesi in senso matematico, le raccolte di elementi costruite con criteri soggettivi, come i libri più interessanti o i film preferiti.

Sono insiemi, intesi in senso matematico, quelli formati dalle note musicali, dai numeri pari o dalle regioni italiane.

Matematica e storia

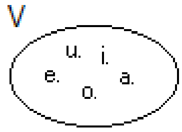
La teoria degli insiemi fu elaborata dal matematico tedesco Georg Cantor (San Pietroburgo, 3/3/1845 - Halle, 6/1/1918).

it.wikipedia.org/wiki/Georg_Cantor

La rappresentazione degli insiemi e dei loro elementi

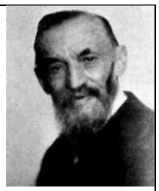
Gli insiemi sono rappresentati con lettere maiuscole dell'alfabeto.
Alcune lettere sono usate per particolari insiemi numerici e sono da ritenersi riservate.

Gli elementi di un insieme sono indicati con lettere minuscole.

Per **elencazione,** riportando la lista degli elementi che lo compongono. Questo modo è meglio noto come rappresentazione **tabulare**.	$V=\{a; e; i; o; u\}$ (si legge: l'insieme V formato dagli elementi *a*, *e*, *i*, *o*, *u*)
Per **caratteristica**, descrivendo la proprietà comune ai suoi elementi.	$V=\{x \mid x \text{ è una vocale}\}$ (si legge: l'insieme V formato dagli elementi x tali che x è una vocale)
Graficamente, con il **diagramma di Eulero-Venn** *(ellisse o linea curva che racchiude al suo interno i diversi elementi dell'insieme indicati con un punto).*	

Per indicare che un elemento appartiene a un dato insieme si usa il simbolo di **appartenenza** ∈ (appartiene a)
e se un elemento non appartiene si
usa il simbolo di **non appartenenza** ∉ (non appartiene a).

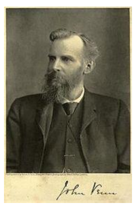
Matematica e storia
Dobbiamo al matematico italiano Giuseppe Peano (Spinetta di Cuneo, 27/8/1858- Torino, 20/4/1932) l'introduzione del simbolo di appartenenza (∈ e ∉).
it.wikipedia.org/wiki/Giuseppe_Peano



Esempio
$A=\{x \mid x \text{ è una nota musicale}\}$
$Do \in A \qquad Tu \notin A$

Si legge: dato l'insieme A delle note musicali, "Do" appartiene ad A
"Tu" non appartiene ad A.

Matematica e storia
Euler Leonard (Basilea, 15 4/1707 – San Pietroburgo, 18/9/1783), matematico, fisico, astronomo e filosofo, è considerato tra i maggiori scienziati dopo la generazione di Newton.



Matematica e storia
John Venn (Hull, 4/8/1834 - Cambridge, 4/4/1923) matematico inglese diede un apporto geniale allo studio della logica matematica. Sostituì i cerchi di Eulero con forme ellittiche che meglio si prestano a rappresentare gli insiemi.

I simboli adottati per indicare le relazioni tra insiemi fanno parte dello standard ISO 31-11, sostituito nel 2009 da ISO/IEC 80000, dei simboli matematici (en.wikipedia.org/wiki/ISO_31-11).

Cardinalità

Gli insiemi sono composti di quantità diverse di elementi.
La numerosità degli elementi di un insieme si indica con il termine di **cardinalità** o **potenza**.
Un insieme può anche essere privo di elementi. Si parla in questo caso di **insieme vuoto**.
Il simbolo usato per l'insieme vuoto è uno zero barrato $\emptyset$ o la scrittura $\{\}$.

La cardinalità di un insieme indica il numero di elementi in esso contenuti.

Un insieme si dice **finito** quando contiene un numero limitato di elementi.	$A=\{x \mid x$ *è un alunno della classe 1A*$\}$
Un insieme si dice **infinito** quando contiene un numero illimitato di elementi.	$B=\{x \mid x$ *è un numero dispari*$\}$
Un insieme si dice **vuoto** quando non contiene alcun elemento.	$C=\{x \mid x$ *è un bambino alto più di 3 metri*$\}$

La cardinalità di un insieme è indicata in questo testo con ***n(A)*** e si legge "la cardinalità dell'insieme A è" oppure "la potenza dell'insieme A è…".
Sono utilizzati anche i simboli **|A|** o **card (A)**.

Matematica e storia
L'attuale simbolo usato per indicare l'infinito (∞) fu usato per primo dall'inglese John Wallis (Ashford, 23/11/1616 – Oxford, 28/10/1703)

La cardinalità dell'insieme vuoto è zero. $n(\emptyset) = 0$
La cardinalità degli insiemi infiniti è infinito. $n(\mathbb{N}) = \infty$
La cardinalità di tutti gli altri insiemi è un numero naturale. $n(A) = a$ con $a \in \mathbb{N}$

Due o più insiemi possono avere o non avere lo stesso numero di elementi.

Insiemi equipotenti hanno lo stesso numero di elementi ($n(A) = n(B)$) e tra essi si può stabilire una corrispondenza biunivoca, cioè è possibile associare ad ogni elemento di A un elemento di B.

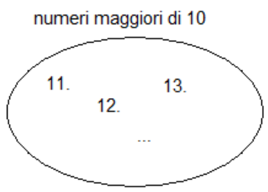
Due insiemi equipotenti si dicono uguali ($A = B$) se hanno, indipendentemente dall'ordine in cui questi sono presentati, gli stessi elementi.

Esempio
$A=\{do, fa, sol, re, mi, la, si\}$ $B=\{do, re, mi, fa, sol, la, si\}$
$A = B$ quindi $n(A) = n(B)$

La rappresentazione per caratteristica si presta bene a descrivere insiemi la cui numerosità è elevata.
La rappresentazione grafica è utile per rappresentare situazioni e per operare con gli insiemi.
La rappresentazione tabulare non è adatta a descrivere insiemi infiniti.

Si ricorre ai tre punti di sospensione per estendere l'uso della rappresentazione grafica e tabulare a insiemi molto numerosi o di cardinalità infinita.

Esempio
$A=\{x \mid x$ *è un numero maggiore di 10*$\}$
$A=\{11, 12, 13, \ldots\}$



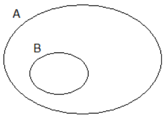
Sottoinsiemi

Gli oggetti appartenenti a un insieme sono raggruppabili ulteriormente in sottogruppi.
I libri gialli di una biblioteca, i film di fantascienza di una videoteca, le penne in vendita in una cartoleria, sono raggruppamenti interni a un insieme di oggetti e sono definiti **sottoinsiemi**.

Si dice che B è un sottoinsieme proprio di un insieme A quando tutti gli elementi di B appartengono anche ad A.

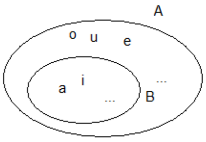
Per indicare che un insieme è contenuto in un altro si usa il simbolo $\subset$.
Per indicare che un insieme non è incluso in un altro si usa il simbolo $\not\subset$.

La situazione s'indica con la scrittura $B \subset A$.
Si legge "B è sottoinsieme (proprio) di A" o che "B è incluso in A".



Un sottoinsieme B si dice **sottoinsieme proprio** di A, se contiene almeno un elemento di A, ma non coincide con esso.

Esempio
Dato l'insieme A={x|x è una vocale} e l'insieme B={x|x è una lettera della parola "aia"}, allora (B $\subset$ A).



*Sono sottoinsiemi impropri di un insieme A, l'insieme stesso (**A** $\subset$ **A**) e l'insieme vuoto (∅ $\subset$ **A**).*

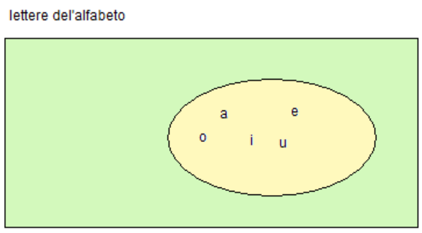
Il concetto di inclusione di un insieme in un altro non va confuso con quello di appartenenza di un elemento ad un insieme.
Un insieme, infatti, può essere incluso in un altro e un elemento appartenere a uno solo di questi due insiemi).

Matematica e scienze
Gli organismi viventi, che costituiscono un grande "insieme", è suddiviso in diversi sottoinsiemi, detti "Regni", secondo determinati criteri.

L'insieme universo

L'**insieme universo**, solitamente indicato con U, è un particolare insieme che contiene tutti gli insiemi esistenti (compresi l'insieme stesso e l'insieme vuoto). L'unico insieme che contiene l'insieme universo è l'insieme universo stesso.
Stabilito un insieme universo a cui fare riferimento, si può calcolare il **complementare** di un insieme, intendendo con questo gli elementi dell'insieme universo che non appartengono all'insieme dato.
L'insieme complementare si indica con la lettera maiuscola dell'insieme da rappresentare, sovrastata da un trattino.
L'insieme universo viene generalmente rappresentato con un rettangolo.

Esempio
U = {x|x è una lettera dell'alfabeto}
$\bar{U}$ = {x|x è una vocale}



Partizione di un insieme

Gli insiemi possono essere suddivisi in più sottoinsiemi.

L'unione di tali sottoinsiemi deve corrispondere all'insieme di partenza.

Ne sono un esempio le suddivisioni all'interno dei diversi regni dei viventi fatte dai tassonomi (le persone che si occupano di studiare e classificare gli organismi viventi assegnando a ognuno un nome).

*Si dice **partizione** di un insieme A, l'insieme dei sottoinsiemi di A che non sono vuoti, nei quali ogni elemento di A appartiene a un solo sottoinsieme. L'unione di tutti i sottoinsiemi deve coincidere con l'insieme A.*

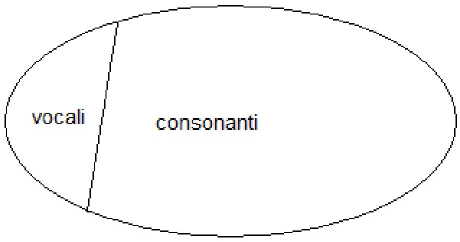
L'insieme unione dei sottoinsiemi delle parti dà l'insieme di partenza.

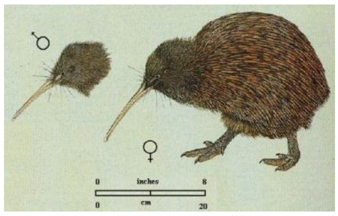
Esempio

C = {x|x è una lettera dell'alfabeto}

A = {x|x è una vocale}

B = {x|x è una consonante}





Matematica e scienze
Gli uccelli costruiscono una classe suddivisa in due superordini. I Paleognati (uccelli per lo più incapaci di volare) e i Neognati. Questa suddivisione ha tutte le caratteristiche di una partizione di un insieme. Non ci sono sottoinsiemi vuoti, un uccello appartiene a uno dei due superordini e l'unione dei due superordini costituisce la classe degli uccelli.

L’insieme ℕ dei numeri naturali

C’è stato un tempo in cui gli uomini non avevano il concetto di numero e non sapevano contare.

E’ probabile che inizialmente l’uomo abbia associato a ogni elemento da contare un sassolino, o una tacca su un bastone o su un osso. Per gli uomini primitivi, contare significava, stabilire una corrispondenza fra gli oggetti reali e gli oggetti simbolo (sassolini o incisioni). L’uomo utilizzava un concetto insiemistico, dovendo confrontare insiemi equipotenti.

I numeri che l’uomo ha utilizzato per confrontare e contare sono detti **numeri naturali**.

I numeri si ottengono dalla combinazioni di dieci simboli, detti **cifre**.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0

Usando questi simboli è possibile comporre qualsiasi numero. Cifre e numeri non sono da usare come sinonimi.

L’**insieme dei numeri naturali** è indicato con la lettera maiuscola ℕ dell'alfabeto latino, secondo lo standard ISO 31-11 dei simboli matematici (en.wikipedia.org/wiki/ISO_31-11).

Un numero qualsiasi, appartenente all’insieme N, si indica con lettere minuscole dell'alfabeto.

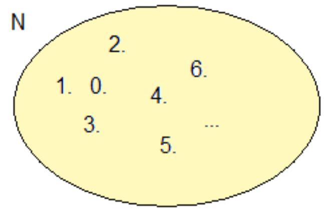
Lo zero va compreso tra i numeri naturali.

L’insieme ℕ, dei numeri naturali, può essere rappresentato nei modi che già conosci.

Rappresentazione tabulare. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$

Rappresentazione per caratteristica. $\mathbb{N} = \{x | x \text{ è un numero naturale}\}$

Rappresentazione grafica, con i diagrammi di Eulero-Venn.



Esempio

Per indicare che 9 è un numero naturale si scrive: $9 \in \mathbb{N}$

Per indicare che -1 non è un numero naturale si scrive: $-1 \notin \mathbb{N}$

Per indicare che i numeri pari sono un sottoinsieme di N si scrive: $P \subset \mathbb{N}$

Caratteristiche dell'insieme N e confronto di numeri

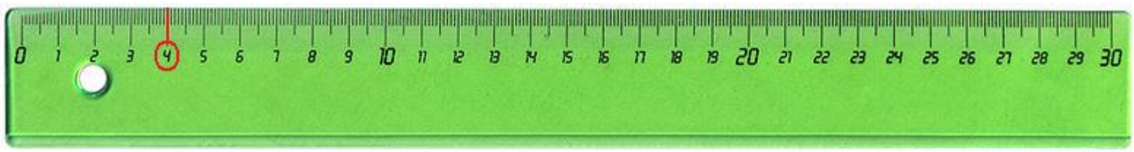
L'insieme ℕ, dei numeri naturali, è **infinito** e **ordinato**.

E' possibile rappresentare, quindi, su una semiretta orientata i numeri naturali.

Tracciata una semiretta e preso un segmento come unità di misura, ad esempio il centimetro (u=1 cm), si riporta più volte consecutivamente, dall'origine verso destra, il segmento unitario scelto, ponendo dei punti come marcatori e delle lettere in corrispondenza di ogni unità.

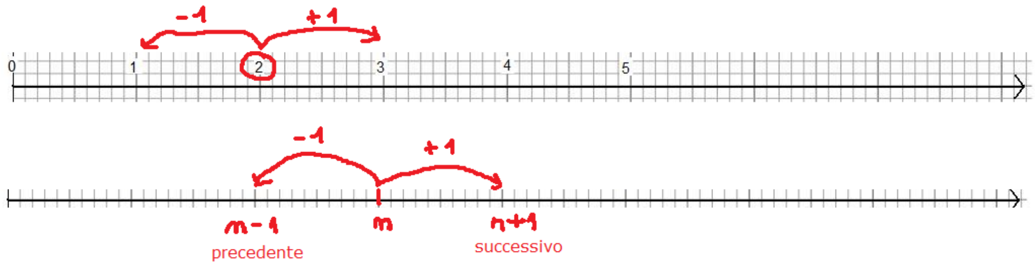
Facendo coincidere l'origine della semiretta con lo zero, si associa un numero naturale a ogni punto ottenuto. In questo modo si ottiene una rappresentazione geometrica dei numeri naturali. Ciascun punto rappresenta l'**immagine** del numero corrispondente. La scelta del segmento unitario è arbitraria. Per rappresentare numeri molto grandi si può procedere, ad esempio, di 10 in 10 o di 100 in 100.

Esempio Valore 4 riportato su di un righello .



Nella successione dei numeri naturali un numero qualsiasi differisce di un'unità dal suo **precedente** (*n-1*) e dal suo **successivo** (*n+1*).

Dato un numero *n*, in generale, questo risulta compreso tra un suo precedente e un suo successivo: $(n-1) < n < (n+1)$. Unica eccezione è lo zero che non ha un precedente: $0 < (0+1)$.



E' possibile eseguire un confronto tra due numeri qualsiasi della successione e stabilire se siano in relazione di **uguaglianza** o **disuguaglianza**. Ogni numero naturale è, infatti, diverso, maggiore o minore, di un altro che non sia esso stesso.
Il simbolo usato per indicare la relazione di uguaglianza è l'uguale (=).

Matematica e storia
I simboli di disuguaglianza furono introdotti nel 1557 dal matematico gallese Robert Recorde (c. 1510, Tenby – 1558, London).

Matematica e storia
Il simbolo di uguaglianza (=) fu introdotto nel 1557 dal matematico inglese Thomas Harriot (c. 1560, Oxford – 2 luglio 1621, London).

Per indicare che due numeri naturali sono differenti tra di loro si può utilizzare semplicemente il simbolo di diverso, ottenuto barrando l'uguale ($\neq$).

Dati due numeri qualsiasi si usano spesso i simboli di disuguaglianza per indicarne l'ordine: il simbolo "$>$" che significa "maggiore di" e il simbolo "$<$" che significa "minore di".

Esempio
Per indicare che 13 è diverso da 7 e maggiore di 7 si scrive: $13 \neq 7$ *e* $13 > 7$.
Per indicare i numeri naturali compresi tra 12 e 20 si scrive: $A=\{x|x \in \mathbb{N} : 12 < x < 20 \}$
(si legge "l'insieme A formato dagli elementi x tali che x è un numero naturale e con x compreso tra 12 e 20")

Dati due numeri naturali qualsiasi, è sempre possibile stabilire quale sia il maggiore e il minore. Il maggiore si trova sulla semiretta orientata i numeri naturali, alla destra del numero dato, il minore alla sua sinistra.

Esempio
Dato il numero 13:

Precedente	Numero	Successivo
12 <	13	< 14

Sulla retta 12 precede 13 e quindi $12 < 13$; 14 segue 13 e quindi $13 <14$.
Si può scrivere che $12 < 13 < 14$ e si legge: "il 13 è compreso tra il 12 e 14".

E' possibile utilizzare il linguaggio dell'insiemistica per indicare intervalli limitati o illimitati di numeri naturali.

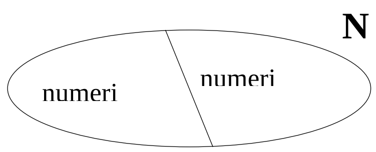
Esempio
Con la scrittura $\{x|x \in \mathbb{N} : a<x\leq b \}$ *s'indicano tutti i numeri naturali compresi tra a e b, incluso b ed escluso a e si legge "insieme formato dagli elementi x tali che x è un numero naturale compreso tra a e b, b incluso".*

Altri insiemi numerici

L'insieme ℕ racchiude due sottoinsiemi: l'insieme dei numeri **pari**, che terminano con le cifre 0, 2, 4, 6, 8, e dei numeri **dispari**, che terminano con le cifre 1, 3, 5, 7, 9. Lo zero deve essere considerato pari.

Pari	0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, … *P={x|x ∈ N : x è pari }*
Dispari	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, … *D={x|x ∈ N : x è dispari }*

I numeri pari e dispari costituiscono due parti dell'insieme dei numeri naturali.



Nella rappresentazione per caratteristica è talvolta utile aggiungere l'indicazione "pari" o "dispari" alla descrizione dell'insieme.

Esempio *Per indicare i numeri pari minori di 18 si scrive: A={x|x ∈ ℕ : x <18 e x è pari }* *Per indicare i numeri dispari tra 11 e 15: A={x|x ∈ ℕ : 11 < x <15 e x è dispari }*

Esistono altri insiemi numerici, oltre all'insieme ℕ dei numeri naturali.

L'insieme dei numeri razionali (ℚ)

Comprende i numeri naturali (0, 1, 2, …), le frazioni e i numeri con la virgola, sia i decimali limitati (es. *1:2=0,5 con resto 0*) sia i decimali illimitati, periodici (es. *1:3 = 0,33333...* = $0,\overline{3}$), comunque riconducibili a *frazioni*.

L'**insieme dei numeri relativi (ℤ)**

Comprende i numeri naturali (0, 1, 2, ...) e i numeri interi negativi (−1, −2, −3,...), ottenuti ponendo un segno "−" davanti ai naturali. La cardinalità è equivalente a $\aleph_0$.
I numeri privi di segno sottintendono un segno positivo.

L'**insieme dei numeri irrazionali (I**, anche se non esiste un simbolo condiviso**)**

Numeri illimitati, non periodici, non riconducibili a una frazione generatrice.

L'**insieme dei numeri reali (ℝ)**

Comprende gli insiemi numerici precedenti.